٢

جامعة البعث	امتحان مقرر نظرية الشبكات	اسم الطالب :
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة رياضيات-جبر	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	الفصل الثاني للعام الدراسي 2015/2014	العلامة : 100

السؤال الأول : (20 علامة)

إذا كان $f: E \to F$ إيزومورفيزم ترتيب وإذا كانت $A \subseteq E$ تملك حد أعلى أصغري S في E ، فاثبت أن $f(A)$ تملك عندئذ حد أعلى أصغري في F وهو $f(S)$ أي أن $sup_F(f(A)) = f(sup_E A)$.

السؤال الثاني : (16 علامة)

لتكن E مجموعة ما ولتكن الشبكة $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. نقول عن المجموعة الجزئية A من E بأنها منتهية التمام إذا كانت C_A منتهية . اثبت أن أسرة المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام من E والتي نرمز لها بالرمز $FC(E)$ تكون شبكة جزئية من $\mathcal{P}(E)$.

السؤال الثالث : (16 علامة)

أثبت أنه في أي شبكة المرشحة التي تملك مولد منتهي تكون مرشحة أساسية .

السؤال الرابع : (32 علامة)

أ – أرسم مخطط للشبكة $(D(60), |)$ ثمّ أذكر ثلاثة مرشحات وثلاثة مثاليات فيها وبيّن فيما إذا كانت أساسية ؟

ب – لتكن الشبكة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ والمرتبة بعلاقة يقسم ، أرسم مخطط لهذه الشبكة ثمّ بيّن أنها ليست توزيعية .

ج – لتكن الشبكة $\acute{E} = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ المرتبة بعلاقة يقسم . أوجد متممات العناصر $2 , 4 , 5$.

السؤال الخامس : (16 علامة)

إذا كان f إيزومورفيزم بولياني من A على B ، فاثبت أن تطبيقه العكسي f^{-1} يكون إيزومورفيزم بولياني من B على B . A

حمص في 2015/7/2 — د . عصام نسيم

جامعة البعث	امتحان مقرر نظرية الشبكات	العلامة : ١٠٠
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥	اسم الطالب :

السؤال الأول : (١٥ علامة)

أ – لتكن $A = Q \cap [1 , \sqrt{3}]$ مجموعة جزئية في Q . أوجد حد أعلى واحد والحد الأعلى الأصغري وحد أدنى واحد والحد الأدنى الأعظمي للمجموعة A (في حال وجودها وبفرض أن Q مجموعة الأعداد العادية والترتيب المعرف عليها الترتيب العادي المألوف)

ب – إذا كان $f: E \to E'$ هو $\vee$ – مورفيزم من نصف الشبكة العليا $(E , \leq)$ في نصف الشبكة العليا $(E' , \leq)$ فاثبت أن f متزايد .

السؤال الثاني : (٢٠ علامة)

اثبت أن مجموعة المرشحات الفعلية المرتبة بعلاقة الاحتواء تكون شبه استقرائية ، ثم استنتج أن كل مرشحة فعلية تكون محتواة في مرشحة فعلية عظمى (فوق مرشحة) .

السؤال الثالث : (١٥ علامة)

اثبت أن كل شبكة توزيعية هي شبكة معيارية ثم بيّن أن العكس غير صحيح .

السؤال الرابع : (١٥ علامة)

لتكن E شبكة متممة معيارية (أو توزيعية) فاثبت أنها متممة نسبياً .

السؤال الخامس : (١٥ علامة)

نقول عن مرشحة F أنها أولية إذا كان $x \vee y \Longrightarrow$ إما $x \in F$ أو $y \in F$ ، لتكن E شبكة توزيعية و F فوق مرشحة فيها ، فاثبت أن F أولية .

السؤال السادس : (١٠ علامات)

ليكن f ايزومورفيزم بولياني من A على B فاثبت أن تطبيقه العكسي f^{-1} يكون ايزومورفيزم بولياني من B على A .

السؤال السابع : (١٠ علامات)

ليكن A جبر بولياني و a , b عنصرين ثابتين في A ولتكن المعادلة $ax + b = 0$ في A وبفرض أن حلول المعادلة السابقة تعطى بالمتراجحة المزدوجة $b \leq x \leq a + b + 1$ ، فاوجد حلول المعادلة $35\, x + 5 = 0$ في $D(210)$.

حمص في 2/2/٢٠١٥	د . عصام نسيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات (جبر)
الفصل الثاني للعام الدراسي 2016/2015

اسم الطالب :
العلامة : 100
المدة : ساعة ونصف

السؤال الأول : (18علامة)

أ – لتكن $(\mathbb{R}, \leq)$ السلسلة العادية ولتكن $A = [2,3[\cup [4,5]$ و $B = [2,3[$ ، والمطلوب : أوجد

$sup_{\mathbb{R}}B$, $sup_A B$, $sup_{\mathbb{R}}A$.

ب – أثبت أن أي مورفيزم شبكة يكون تطبيقاً متزايداً .

السؤال الثاني : (17 علامة)

أثبت أن المرشحات الفعلية في أي شبكة والمرتبة بعلاقة الاحتواء تكون شبه إستقرائية .

السؤال الثالث : (20 علامة)

أ – برهن أن كل شبكة متممة وتوزيعية تكون متممة نسبياً .

ب – برهن أنه في أي شبكة توزيعية E ، إذا كان $x, y, z \in E$ فإنه تتحقق المساواة :

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

السؤال الرابع : (10 علامات)

إذا كانت A حلقة بوليانية و F مرشحة فعلية فيها ، فاثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون F فوق مرشحة هو أن يكون من أجل أي $x \notin F$ فإن $\bar{x} \in F$.

السؤال الخامس : (15 علامة)

ليكن $f : A \to B$ مورفيزم بولياني من الحلقة البوليانية A في الحلقة البوليانية B ، أثبت أنه إذا كانت F مرشحة في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A .

السؤال السادس : (20 علامة)

ليكن A جبر بولياني و a, b عنصرين ثابتين في A ، ولتكن المعادلة $ax + b = 0$ في A .

أ – برهن أن المعادلة السابقة يكون لها حلول إذا وفقط إذا كان $b \leq a$.

ب – إذا كانت الحلول تعطى بالعلاقة $b \leq x \leq a + b + 1$ أوجد حلول المعادلة $70\,x + 10 = 0$ في $D(210)$.

حمص في 16 / 6 / 2016

د . عصام نسيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي 2013 /2014

المدة : ساعتان
العلامة : 100
اسم الطالب : معن الحمد الله

السؤال الأول : (10 علامات)

ليكن $f: E \to F$ ايزومورفيزم ترتيب ولتكن A مجموعة جزئية من E تملك حد أدنى أعظمي I في E فاثبت أن $f(A)$ تملك حد أدنى أعظمي في F وهو $f(I)$ أي أن $f(inf_E A) = inf_F(f(A))$.

السؤال الثاني : (15 علامة)

لتكن $(E, \leq)$ شبكة وليكن $a, b, c, d \in E$ فاثبت :

1) إذا كان $a \leq b$ فإنه من أجل أي x من E يكون $a \vee x \leq b \vee x$, $a \wedge x \leq b \wedge x$.
2) إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a \vee c \leq b \vee d$, $a \wedge c \leq b \wedge d$.

السؤال الثالث : (15 علامة)

لتكن $(E, \leq)$ شبكة فاثبت أن المرشحة F_G المولدة بالمجموعة الجزئية غير الخالية G من E هي مجموعة العناصر x من E التي تحقق الخاصة : يوجد عدد منته من عناصر G ولتكن $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحيث يكون $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$.

السؤال الرابع : (15 علامة)

ارسم شبكة قواسم 60 أي $D(60)$ ثم أوجد المرشحات F_2 , F_3 (أي المرشحات المولدة بالعناصر 2 , 3) ثم المثالية I_{30} (أي المثالية المولدة بالعنصر 30) .

السؤال الخامس : (15 علامة)

1) ارسم الشبكة $D(20)$ ثم أوجد متممات العناصر 5 , 4 , 2 فيها .
2) ارسم الشبكة $D(30)$ ثم أوجد متممات العناصر 5 , 3 , 2 فيها .

السؤال السادس : (15 علامة)

إذا كان f ايزومورفيزم بولياني من A على B فاثبت أن التطبيق العكسي f^{-1} يكون ايزومورفيزم بولياني من B على A .

السؤال السابع : (15 علامة)

ليكن A جبر بولياني و $a, b \in A$ ولتكن المعادلة $ax + b = 0$ في A فإذا كانت حلول المعادلة تعطى بالمتراجحة المزدوجة $b \leq x \leq a + b + 1$ فاوجد حلول المعادلة $10x + 2 = 0$ في $D(210)$ ثم تحقق من صحة الحلول .

د . عصام نسيم

حمص في 1/21/ 2014

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات – شعبة الجبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2012 /2013

اسم الطالب:
العلامة: 100
المدة: ساعتان

<u>السؤال الأول:</u> (15 علامة)

لتكن E مجموعة مرتبة و $B \subseteq A \subseteq E$ ، فاثبت ان: $\sup_E B \leq \sup_E A$ و $\inf_E A \leq \inf_E B$ ،

<u>السؤال الثاني:</u> (15 علامة)

لتكن $(E, \leq)$ شبكة ويفرض ان $a, b, c, d \in E$ فاثبت ان:

1) $a \leq b$ ⇐ من اجل اي x من E يكون $a \vee x \leq b \vee x$ و $a \wedge x \leq b \wedge x$.
2) $a \leq b$ و $c \leq d$ ⇐ $a \vee c \leq b \vee d$ و $a \wedge c \leq b \wedge d$.

<u>السؤال الثالث:</u> (20 علامة)

لتكن F مرشحة فعلية في الشبكة E ، فاثبت تكافؤ القضيتين التاليتين:

1) F فوق مرشحة .
2) من اجل اي $x \notin F$ توجد $y \in F$ بحيث يكون $x \wedge y = 0$.

<u>السؤال الرابع:</u> (15 علامة)

نقول عن مرشحة F في الشبكة $(E, \leq)$ انها اولية إذا حققت $(x \vee y \in F \Rightarrow x \in F \text{ or } y \in F)$
والمطلوب:

اثبت أنه في الشبكة التوزيعية كل فوق مرشحة تكون مرشحة أولية .

<u>السؤال الخامس:</u> (20 علامة)

ا – إذا كانت F مرشحة في الشبكة $(Z, \leq)$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $\leq$ علاقة الترتيب العادية ، فاثبت ان F اولية .

ب – اوجد جميع المرشحات الفعلية في الشبكة $(D(20), |)$.

ج – هل أن $D(20)$ شبكة بول ؟ شبكة توزيعية ؟ شبكة معيارية ؟

<u>السؤال السادس:</u> (15 علامة)

عرّف شبكة بول ، ثمّ بيّن أنه إذا عرفنا عملية الجمع في شبكة بول A بالشكل : $x + y = (x \wedge \acute{y}) \vee (\acute{x} \wedge y)$
فإنه يمكن ان تكتب ايضا بالشكل: $x + y = (x \vee y) \wedge (\acute{x} \vee \acute{y})$.

حمص في 20 /8 /2013

د . عصام نعوم

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣

السؤال الأول: 15

- بفرض أن $s = \sup_E A$ ⟸ s هي حد أعلى للمجموعة A ⟸ $B \subseteq A$ لكن s هو حد أعلى للمجموعة B ⟸ $\sup_E B \leq s$ ⟸ $\sup_E B \leq \sup_E A$ (8)
- بفرض أن $I = \inf_E A$ ⟸ I هي حد أدنى للمجموعة A ⟸ $B \subseteq A$ لكن I هو حد أدنى للمجموعة B ⟸ $I \leq \inf_E B$ ⟸ $\inf_E A \leq \inf_E B$ (7)

السؤال الثاني: 15

1) ليكن $a \leq b$ ⟸ $a \wedge b = a$ و $a \vee b = b$

$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = a \wedge x \Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$

$(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x \Rightarrow a \vee x \leq b \vee x$ (8)

2) ليكن $a \leq b$ و $c \leq d$ ⟸ $a \wedge c \leq b \wedge c$ و $b \wedge c \leq b \wedge d$
⟸ $a \wedge c \leq b \wedge d$

(7) $a \leq b$ و $c \leq d$ ⟸ $a \vee c \leq b \vee c$ و $b \vee c \leq b \vee d$
⟸ $a \vee c \leq b \vee d$

السؤال الثالث: 20

- ليكن F غير مرشحة ونفرض أنه توجد $x \notin F$ بحيث يكون من أجل أي $y \in F$ ، $x \wedge y \neq 0$ ولنفرض أن $G = F \cup \{x\}$ فإن G تكون $\wedge$ - متوافقة وذلك لأن:

(6) لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عناصر من G ولنفرض $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$
• إذا كانت جميع العناصر a_i تنتمي إلى F فإن $a \in F$ وبالتالي فإن $a \neq 0$ ،
• إذا كان مثلاً $a_1 = x$ فإن: $a = x \wedge y$ حيث $y = a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$
لأن $y \in F$

الدورة الثالثة ٢٠١٢ - ٢٠١٣

الصفحة (٢)

وبالتالي فإن $a \neq 0$ (خلافاً) ومنه فإن G تولد مرشحة

(6) فعلية F_G كما أن $F \subsetneqq G \subseteq F_G$ وهذا يناقض أعظمية F.

٢١

- إذا كانت الخاصة (٢) محققة ولنفرض بأنه توجد مرشحة فعلية F' بحيث يكون: $F \subsetneqq F'$ ، وليكن $x \in F'$ و $x \notin F$ ⇐

(8) توجد $y \in F$ بحيث يكون: $x \wedge y = 0$ ، كما أن x و y ينتميان إلى F'

فهذا يؤدي إلى أن $0 \in F'$ وهذا يناقض كون F' مرشحة فعلية.

السؤال الرابع: [15]

بفرض أن E شبكة توزيعية وأن F مرشحة فيها ، وليكن $x \vee y \in F$

ولنفترض جدلاً أن F ليست أولية أي أن $x \notin F$ و $y \notin F$

حسب مبرهنة سابقة إذا كانت F مرشحة فعلية فمن أجل $x \notin F$ أي "

يوجد عنصر $x_1 \in F$ بحيث يكون $x \wedge x_1 = 0$

(8)

$$F \Rightarrow x_1 \wedge (x \vee y) = (x_1 \wedge x) \vee (x_1 \wedge y) = 0 \vee (x_1 \wedge y) = x_1 \wedge y \in F$$

ولكن

$$y \notin F \;\; x_1 \wedge y \leq y \Rightarrow y \in F$$

وهذا تناقض ، فالفرض الجدلي خاطئ أي أنه يجب أن يكون إما $x \in F$

(7) أو $y \in F$ وبالتالي فإن F أولية.

السؤال الخامس: [20]

أ - بما أن $(Z, \leq)$ شبكة توزيعية فحسب السؤال الرابع فإن أي مرشحة فعلية F في Z تكون أولية (لأن جميع المرشحات هي فوق مرشحات في $(Z, \leq)$) (7)

ب - المرشحات الفعلية في $D(20)$ هي $\{2,4,20\}$ و $\{4,20\}$ و $\{5,20\}$ و $\{20\}$ (7)

د - الشبكة $D(20)$ ليست متممة وبالتالي فهي ليست توزيعية وليست شبكة بول (6)

~~دورة الفصل~~ الدورة الثالثة عام - ٢٠١٢

الجمعة (٣١)

السؤال السادس: [15]

- شبكة بول هي شبكة توزيعية ومتممة

-

$$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)=[(x\wedge y')\vee x']\wedge[(x\wedge y')\vee y] \quad (5)$$

$$=(x\vee x')\wedge(y'\vee x')\wedge(x\vee y)\wedge(y'\vee y) \quad (5)$$

$$=1\wedge(x'\vee y')\wedge(x\vee y)\wedge 1=(x\vee y)\wedge(x'\vee y') \quad (5)$$

في ٢١/٨/٢٠١٢

د. عصام نسيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات-شعبة الجبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2011 / 2012

الاسم:
العلامة: 100
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (10 درجات) لتكن E مجموعة مرتبة و $B \subseteq A \subseteq E$ فاثبت ان: $sup_E B \leq sup_E A$ و $inf_E A \leq inf_E B$.

السؤال الثاني: (15 درجة) لتكن $(E, \leq)$ شبكة وبفرض ان $a, b, c, d \in E$ فاثبت ان:

1) $a \leq b \Leftarrow$ من اجل اي x من E يكون $a \vee x \leq b \vee x$, $a \wedge x \leq b \wedge x$.

2) $a \leq b$ و $c \leq d \Leftarrow a \vee c \leq b \vee d$ و $a \wedge c \leq b \wedge d$.

السؤال الثالث: (15 درجة) لتكن E مجموعة غير منتهية ولتكن الشبكة $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ فاثبت ان $FC(E)$ (اسرة المجموعات الجزئية من E المنتهية او المنتهية التمام في E) تكون شبكة جزئية من $\mathcal{P}(E)$.

السؤال الرابع: (15 درجة) بفرض ان كل من E و $\acute{E}$ نصف شبكة عليا فاثبت ان f يكون $\vee$ – ايزومورفيزم إذا وفقط إذا كان f ايزومورفيزم ترتيب .

السؤال الخامس: (15 درجة) اثبت انه في نصف الشبكة الدنيا E تكون مجموعة المرشحات الفعلية المرتبة بعلاقة الاحتواء شبه إستقرائية

السؤال السادس: (15 درجة) لتكن $(N^*, |)$ ولتكن A مجموعة جزئية من N^* حيث $A = \{2, 3, 6, 7, 9, 42\}$ والمطلوب:

1) ارسم مخططا تمثيليا لتلك المجموعة .

2) هل ان $(A, |)$ نصف شبكة عليا ؟ ولماذا ؟

3) هل ان $(A, |)$ نصف شبكة دنيا ؟ ولماذا ؟

4) هل ان $(A, |)$ شبكة ؟ ولماذا ؟

5) اوجد $sup_A\{2, 7\}$ و $inf_A\{2, 7\}$ و $inf_A\{6, 7\}$.

السؤال السابع: (15 درجة) اثبت انه في اي شبكة E ومن اجل اي ثلاثة عناصر منها x, y, z فإن المتراجحتين التاليتين محققتان

1) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ، 2) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

حمص في 10 /10 /2012

د. عصام نسيم

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - الجبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١١/٢٠١٢

السؤال الأول: 15

- بفرض أن $S=\sup_E A$ ⇐ S حاد أعلى للمجموعة A و $B\subseteq A$
⇐ S حاد أعلى للمجموعة B ⇐ $\sup_E B \le S$ ⇐ $\sup_E B \le \sup_E A$ (5)

- بفرض أن $I=\inf_E A$ ⇐ I حاد أدنى للمجموعة A و $B\subseteq A$
⇐ I حاد أدنى للمجموعة B ⇐ $I\le \inf_E B$ ⇐ $\inf_E A \le \inf_E B$ (5)

السؤال الثاني: 15

- ليكن $a\le b$ ⇐ $a\wedge b=a$ و $a\vee b=b$

$(a\wedge x)\wedge(b\wedge x)=(a\wedge b)\wedge(x\wedge x)=a\wedge x \Rightarrow a\wedge x\le b\wedge x$ (8)

$(a\vee x)\vee(b\vee x)=(a\vee b)\vee(x\vee x)=b\vee x\Rightarrow a\vee x\le b\vee x$

- ليكن $a\le b$ و $c\le d$ ⇐ $a\wedge c\le b\wedge c$ و $b\wedge c\le b\wedge d$
⇐ $a\wedge c\le b\wedge d$.

$a\le b$ و $c\le d$ ⇐ $a\vee c\le b\vee c$ و $b\vee c\le b\vee d$ (7)

$a\vee c\le b\vee d$

السؤال الثالث: 15

- اذا كانت A و B منتهيتين فإن $A\cup B$ و $A\cap B$ منتهيتين ،

الدورة الثالثة ٢٠١١ - ٢٠١٢
الصفحة (٢)

٢- اذا كانت A, B منتهية التمام فإن كل من $A\cap B$, $A\vee B$ منتهية التمام. (8)

٣- اذا كانت A منتهية و B منتهية التمام فإن $A\cap B$ تكون منتهية بينما $A\vee B$ تكون منتهية التمام. (7)

السؤال الرابع: 15

- لنفرض أن f ∨- ايزومورفيزم من E على E′ فهذا يعني أن f تقابل ومتزايد (لأنه ∨- مورفيزم) كما أن f^{-1} متزايد وذلك لأن:

$$f(x)\le f(y) \Rightarrow f(x)\vee f(y)=f(y) \Rightarrow f(x\vee y)=f(y)\Rightarrow$$

$$x\vee y=y \Rightarrow x\le y$$ (8)

- بفرض أن f ايزومورفيزم ترتيب ⇐ f يحفظ الحدود العليا الأصغرية أي أن:

$$f(\sup_E\{x,y\}) = \sup_{E'} f(\{x,y\}) = \sup_{E'}\{f(x),f(y)\}$$
ومنه

$$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$$ (7)

السؤال الخامس: 15

لتكن $(F_i)_{i\in I}$ اسرة غير خالية من المرشحات الفعلية والمرتبة كلياً ولنفرض أن $F=\bigcup_{i\in I} F_i$ فإن F تكون مرشحة فعلية وذلك لأن:

- $F\neq\phi$

- بفرض أن $x\in F$ و $y\ge x$ ⇐ توجد $i\in I$ بحيث يكون $x\in F_i$ و $y\ge x$ وبما أن F_i مرشحة ⇐ $y\in F_i$ ⇐ $y\in F=\cup F_i$ (5)

الدورة الثالثة ٢٠١١ - ٢٠١٢

الوجه (٣)

- لنفرض أن $x \in F$ و $y \in F$ ... $j \in I$ ...

$x \in F_i$ و $y \in F_j$ بالإضافة لذلك فإن F_i و F_j متقارنتين

لأنه من أجل علاقة الاحتواء فليكن مثلاً $F_i \subseteq F_j$ فعندئذ (5)

يكون $x \in F_j$ و $y \in F_j$ و F_j مرشحة $\Leftarrow x \wedge y \in F_j$

$\Leftarrow x \wedge y \in \bigcup_{i \in I} F_i = F$ وبالتالي فإن F مرشحة.

- F مرشحة فعلية لأنه من أجل أي i فإن $0 \notin F_i \Leftarrow$

$0 \notin \bigcup_{i \in I} F_i = F$ وبالتالي فإن F فعلية.

إذا F هو الحد الأعلى الأصغري للأسرة $(F_i)_{i \in I}$ في مجموعة

المرشحات الفعلية، أي أن أسرة المرشحات الفعلية تكون (5)

شبه استقرائية.

السؤال السادس: 15

1)

A: 42، 7، 6، 9، 2، 3

(3)

2) $(A, |)$ ليست نصف شبكة عليا (3)

لأن $7 \vee 9$ غير موجود في A.

3) $(A, |)$ ليست نصف شبكة دنيا لأن

$2 \wedge 7$ غير موجود (3)

4) $(A, |)$ ليست شبكة لأنها ليست نصف شبكة عليا ولا دنيا (3)

5) $\sup_A \{2, 7\} = 42$ $\quad$ $\inf_A \{2, 7\} = \phi$ غير موجود

$\inf_A \{6, 7\} = \phi$ غير موجود (3)

الفترة الثالثة ١١-٢٠ ٢٠١٢

الجمعة (٤)

<u>السؤال السابع</u> : 15

1) $x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge z$ & $x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge y \Rightarrow$

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (8)

2) $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$ & $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z \Rightarrow$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (7)

(1)

دورات سلام
نظرية الشبكات

اسم الطالب:	إمحان مقرر نظرية الشبكات	جامعة البعث
المدة: ساعتان	لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر	كلية العلوم
العلامة: 100	الفصل الثاني للعام الدراسي 2012 /2013	قسم الرياضيات

السؤال الأول: (15 علامة)

لتكن E نصف شبكة دنيا ، فاثبت أن المرشحة التي تملك مولد منتهي تكون مرشحة أساسية ، ثمّ بيّن أنه في نصف الشبكة الدنيا المنتهية جميع المرشحات تكون أساسية.

السؤال الثاني: (20 علامة)

برهن أنه في أي شبكة $(E,\leq)$ مزودة بقانوني تشكيل $\wedge$ و $\vee$ فإن الشرطين التاليين متكافئان:

1) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

2) $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ وذلك من أجل أي $x\ ,\ y\ ,\ z$ من E.

السؤال الثالث: (15 علامة)

أذكر تعريف كل من الشبكة التوزيعية والشبكة المعيارية ، ثمّ أعط مثالاً على شبكة معيارية ولكنها ليست توزيعية ومثالا على شبكة ليست معيارية .

السؤال الرابع: (15 علامة)

في الشبكة E نقول عن المرشحة F أنها أولية إذا كان $x\vee y\in F\Rightarrow x\in F\ or\ y\in F$ والمطلوب:

أثبت أنه في الشبكة التوزيعية كل فوق مرشحة تكون مرشحة أولية .

السؤال الخامس: (15 علامة)

أثبت تحقق قانوني دي مورغان في شبكة بول A أي أن:

$(x\vee y)^{`}=x^{`}\wedge y^{`}\ ,\ (x\wedge y)^{`}=x^{`}\vee y^{`}\ ;\forall\, x,y\in A$

السؤال السادس: (20 علامة)

إذا كان A و B جبري بول و f تطبيق من A في B فأذكر تعريف المورفيزم البولياني ثمّ أثبت تكافؤ القضايا التالية:

1) f مورفيزم بولياني .

2) من أجل أي عنصرين $x,y\in A$ فإن $f(x\,y)=f(x)\,f(y)$ و $f(x^{`})=\big(f(x)\big)^{`}$.

3) من أجل أي عنصرين $x,y\in A$ فإن $f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$ و $f(x^{`})=\big(f(x)\big)^{`}$.

في 8/ 7 / 2013 د. عصام نسيم

١

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة رابعة رياضيات (جبر)
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣

السؤال الأول: 15

لتكن المرشحة F_G المولدة بالمجموعة المنتهية G.

- اذا كانت $G=\phi$ فإن $F_G=\{1\}=F_1$ (3)
- اذا كانت $G=\{a_1,\dots,a_q\}$ لنفرض أن $a=a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_q$

عندئذ يكون $F_G=F_a$ لأنه: (3)

- بفرض $x\in F_G \Leftarrow x\geq a_{i_1}\wedge\dots\wedge a_{i_n}\geq a \Leftarrow x\in F_a$ (3)
- بفرض $x\in F_a \Leftarrow x\geq a$ و $a\in F_G \Leftarrow x\in F_G$ ومنه (3)

تنتج المساواة.

اذا كانت نصف الشبكة الدنيا منتهية فهي تملك مولد منتهي وبالتالي جميع مرشحاتها تكون أساسية. (3)

السؤال الثاني: 20

بفرض أن (1) محققة فإن:

$(x\vee y)\wedge(x\vee z)=[(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z]$ من الفرض

$=x\vee[(x\vee y)\wedge z]$ الماصية (5)

$=x\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$ من الفرض

$=x\vee(y\wedge z)$ الماصية (5)

بفرض أن (2) محققة فإن:

$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=[(x\wedge y)\vee x]\wedge[(x\wedge y)\vee z]$

$=x\wedge[(x\wedge y)\vee z]$ (5)

$=x\wedge(x\vee z)\wedge(y\vee z)$

$=x\wedge(y\vee z)$ (5)

(3)

الحل

دورة الفصل الثاني ٢٠١٢ - ٢٠١٣

السؤال الثالث: [15]

- تكون الشبكة E توزيعية اذا كان كل من القانونين $\wedge$, $\vee$ يقبل التوزيع على الآخر وهذا يكافئ القول بأن E تحقق أحد الشرطين (1) أو (2) في السؤال السابق. (4)

- نسمي الشبكة E معيارية إذا كان من أجل أي ثلاثة عناصر $x,y,z \in E$ فإن الشرط التالي محقق $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ (4)

- الشبكة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ المرتبة بعلاقة يقسم تكون معيارية لكنها ليست توزيعية (4)

- الشبكة $E_1 = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ المرتبة بعلاقة يقسم ليست معيارية (3)

السؤال الرابع: [15]

بفرض ان E شبكة توزيعية وان F فوق مرشحة فيها، وليكن $x \vee y \in F$ ولنفرض جدلاً ان $x \notin F$ و $y \notin F$.

حسب مبرهنة سابقة، اذا كانت F فوق مرشحة فمن أجل أي $x \notin F$ يوجد عنصر $x_1 \in F$ بحيث يكون $x \wedge x_1 = 0$ (8)

$$\underbrace{x_1 \wedge (x \vee y)}_{\in F} = (x_1 \wedge x) \vee (x_1 \wedge y) = 0 \vee (x_1 \wedge y) = x_1 \wedge y \in F$$

ولكن

$$y \notin F \text{ و } x_1 \wedge y \leq y \Rightarrow x_1 \wedge y \notin F$$

وهنا تناقض فالفرض الجدلي خاطئ أي أنه يجب ان يكون إما $x \in F$ أو $y \in F$ أي ان F أولية (7)

س الخامس: 15

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0)$$
$$= 0 \vee 0 = 0 \quad (5)$$

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (1 \vee y') \wedge (x' \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 = 1 \quad (5)$$

ومنه ينتج أن $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

$$(x' \wedge y')' = x \vee y \Rightarrow (x' \wedge y') = (x \vee y)' \quad (5)$$

السؤال السادس: 20

$1 \Rightarrow 2$

$$f(x') = f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + 1 = (f(x))' \quad \forall x \in A \quad (4)$$

$2 \Rightarrow 3$

$\forall x, y \in A \Rightarrow x', y' \in A$

$$f(x \vee y) = f(x'y')' = (f(x'y'))' = (f(x')f(y'))'$$
$$= (f(x'))' \vee (f(y'))' = f(x) \vee f(y) \quad (4)$$

$3 \Rightarrow 1$

$\forall x, y \in A \Rightarrow x', y' \in A$

$$f(xy) = f(x' \vee y')' = (f(x' \vee y'))' = (f(x') \vee f(y'))'$$
$$= (f(x'))'(f(y'))' = f(x) f(y) \quad (4)$$

$$f(x+y) = f[(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)] = f(x \wedge y') \vee f(x' \wedge y)$$
$$= [f(x) \wedge f(y')] \vee [f(x') \wedge f(y)] \quad (4)$$
$$= [f(x) \wedge (f(y))'] \vee [(f(x))' \wedge f(y)] = f(x) + f(y)$$

$$f(1) = f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x) \vee (f(x))' = 1 \quad (4)$$

٢٣/١١/٢٠١٢م

١٥

المدة: ساعتان

الدرجة:100

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات

لطلاب السنة الرابعة رياضيات-شعبة الجبر

الفصل الأول للعام الدراسي 2012/2011

أجب على الأسئلة التالية:

السؤال الأول:(15 درجة)

لتكن $(E,\leq)$ مجموعة مرتبة بحيث أن $A\subseteq F\subseteq E$ ، فأثبت أن:

$\sup_E A\leq\sup_F A$ و $\inf_F A\leq\inf_E A$ **(في حال وجود هذه الحدود الدنيا والعليا) .**

السؤال الثاني: (15 درجة)

أثبت أن المرشحة التي تملك مولد منتهي في أي شبكة تكون أساسية.

السؤال الثالث:(20 درجة)

لتكن F مرشحة فعلية ، فأثبت تكافؤ القضيتين التاليتين:

1) F فوق مرشحة .

2) من أجل أي $x\notin F$ ، توجد $y\in F$ بحيث يكون $x\wedge y=0$.

السؤال الرابع(13 درجة)

ارسم مخططا تمثيليا لشبكة قواسم 60 أي $D(60)$ ثمّ أوجد جميع المثاليات فيها،وبيّن أي منها تكون أساسية ؟

السؤال الخامس:(12 درجة)

أثبت أن كل شبكة توزيعية تكون معيارية ، ثم بيّن أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

السؤال السادس:(13 درجة)

لتكن الشبكتان $E_1=\{1,2,3,5,30\}$ و $E_2=\{1,2,4,5,20\}$ المرتبتان بعلاقة يقسم

1) أوجد متممات العناصر 2 و 5 في كل من الشبكتين .

2) هل أن E_1 و E_2 متممتين ؟

السؤال السابع:(12 درجة)

لتكن E شبكة توزيعية ، فأثبت أنه $\forall x,y,z\in E$ فإن:

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

د.عصام نسيم

(11)

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - شعبة الجبر

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١١/٢٠١٢

السؤال الأول: 15

بفرض أن $S' = \sup_F A$ عندئذ فإن S' تكون حداً أعلى للمجموعة A في F

وبما أن $F \subseteq E$ فإن S' ينتمي الى E إذن $\sup_E A \leq S' \Leftarrow \sup_E A \leq \sup_F A$ (8)

وبشكل مشابه إذا كان $I' = \inf_F A$ فإن I' هو حد أدنى للمجموعة A في F

وبما أن $F \subseteq E$ فإن I' ينتمي الى E إذن $I' \leq \inf_E A \Leftarrow \inf_F A \leq \inf_E A$ (7)

السؤال الثاني: 15

لتكن المرشحة F_G المولدة بالمجموعة المنتهية G .

- اذا كانت $G = \phi$ فإن $F_G = \{1\} = F_1$
- اذا كانت $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ لنفرض أن $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_q$ (8)

عندئذ يكون $F_G = F_a$ لأن:

- بفرض $x \in F_G \Leftarrow x \geq a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_n} \geq a \Leftarrow x \in F_a$ (7)
- بفرض $x \in F_a \Leftarrow x \geq a$ و $a \in F_G \Leftarrow x \in F_G$ ومنه تنتج المساواة

السؤال الثالث: 20

- لتكن F مرشحة وبفرض انه توجد $x \notin F$ بحيث يكون من أجل أي $y \in F$ ، $x \wedge y \neq 0$ ولنفرض أن $G = F \cup \{x\}$ فإن G تكون $\wedge$-متوافقة وذلك لأن:

لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عناصر من G ولنفرض $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$

- إذا كانت جميع a_i تنتمي الى F فإن $a \in F$ وبالتالي $a \neq 0$
- اذا كان مثلاً $a_1 = x$ فإن $a = x \wedge y$ حيث $y = a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ (10)

أن $y \in F$ وبالتالي $a \neq 0$ ومنه فإن G تولد مرشحة فعلية F_G



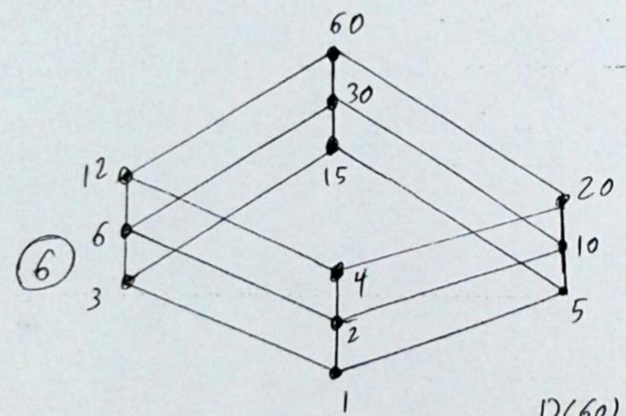
دورة الفصل الأول ٢٠١١ - ٢٠١٢

الجمعة (٢)

كما أن $F \subsetneq G \subseteq F_G$ وهذا يناقض أعظمية F.

- اذا كانت الخاصة 2 محققة، لنفرض بأنه توجد مرشحة فعلية F' بحيث يكون $F \subsetneq F'$، وليكن $x \in F'$ و $x \notin F$ ⇐ توجد $y \in F$ بحيث يكون $x \wedge y = 0$، كما أن x و y ينتميان إلى F' فهذا يؤدي الى أن $0 \in F'$ وهذا يناقض كون F' مرشحة فعلية. (10)

السؤال الرابع: [13]



المثاليات في $D(60)$

$I_2 = \{1,2\}$ $I_3 = \{1,3\}$, $I_5 = \{1,5\}$, $I_6 = \{1,2,3,6\}$

$I_4 = \{1,2,4\}$, $I_{10} = \{1,2,5,10\}$, $I_{12} = \{1,2,3,6,4,12\}$

$I_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$, $I_{15} = \{1,3,5,15\}$, ~~I_{30}~~

$I_{30} = \{1,2,3,5,10,6,15,30\}$, $I_{60} = D(60)$ (6)

جميع المثاليات أولية لأن $D(60)$ منتهية. (1)

دورة الفصل الأول ٢٠١١ - ٢٠١٢

الجلسة (٣)

[13]

السؤال الخامس: [12]

لتكن $(E,\leq)$ شبكة توزيعية ولنفرض أن x,y,z عناصر اختيارية من E فيكون:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

فإذا كان $x \leq z$ فإن: $x \vee z = z$ ومنه

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ وبالتالي فإن E تكون معيارية

العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة لأنه في الشبكة (6)

$E'=\{1,2,3,5,30\}$ المرتبة بعلاقة يقسم ليست توزيعية

لأن:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2 \\ (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \wedge (3 \vee 5) \neq (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5)$$

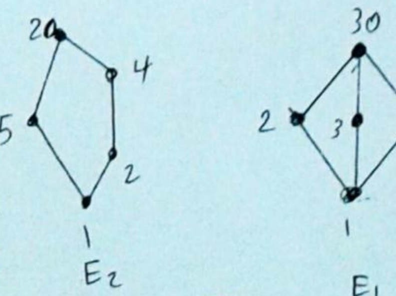
بينما هي معيارية فعلى سبيل المثال

$2 < 30$

(6)
$$\left.\begin{array}{l} 2 \vee (5 \wedge 30) = 2 \vee 5 = 30 \\ (2 \vee 5) \wedge 30 = 30 \wedge 30 = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \vee (5 \wedge 30) = (2 \vee 5) \wedge 30$$

ونلاحظ أن خاصة المعيارية محققة من أجل جميع عناصر E'

السؤال السادس: [13]



1) متمم 2 في E_1 هما 3، 5 (3)

متمم 5 في E_1 هما 2، 3 (3)

متمم 2 في E_2 هو 5 (3)

متمم 5 في E_2 هما 2، 4 (3)

2) كل من E_1، E_2 متممة. (1)

السؤال الخامس: [12]

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) =$

$[x \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \wedge [y \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] =$

$[x \vee (y \wedge z)] \wedge [y \vee (z \wedge x)] =$ (6)

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee x) =$

$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) =$ (6)

كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة جبر
الفصل الأول ٢٠١٢/٢٠١٣

اسم الطالب:
العلامة: ١٠٠
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (١٥ علامة) 2

إذا كان $f:E\to F$ ايزومورفيزم ترتيب، وإذا كانت $A\subseteq E$ تملك حد أعلى أصغري S في E فأثبت أن $f(A)$ تملك حد أعلى أصغري في F وهو $f(S)$ أي أن: $f(\sup_E A)=\sup_F(f(A))$.

السؤال الثاني: (١٠ علامات) 6

أثبت أن أسرة المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام للمجموعة E أي أن $F(E)$ هي شبكة جزئية من $P(E)$.

السؤال الثالث: (١٥ علامة) 6

ليكن $f:E\to E'$ تطبيق من نصف الشبكة الدنيا E في نصف الشبكة الدنيا E'، فأثبت أن f يكون $\wedge$- ايزومورفيزم إذا وفقط إذا كان f ايزومورفيزم ترتيب.

السؤال الرابع: (١٠ علامات) ١٥ 20

أثبت أن كل شبكة توزيعية تكون معيارية، ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

السؤال الخامس: (١٥ علامة)

إذا كان f ايزومورفيزم بولياني من A على B فأثبت أن التطبيق العكسي f^{-1} يكون ايزومورفيزم بولياني من B على A.

السؤال السادس: (١٥ علامة) 20

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون I مثالية عظمى هو أن يكون I' فوق مرشحة وفي هذه الحالة يكون $I' = C_A^I$

السؤال السابع: (٢٠ علامة) 21

ليكن A جبر بولياني و a, b عنصرين ثابتين في A، ولتكن المعادلة $ax+b=0$ في A
1) برهن أن المعادلة الأخيرة يكون لها حلول إذا وفقط إذا كان $b\le a$
2) إذا كان $b\le a$ برهن أن $b\le a+b+1$ وأن جميع حلول المعادلة السابقة تحقق $b\le x\le a+b+1$.
3) في $D(210)$ حل المعادلة $6x+2=0$

حمص في ٢٠/١/٢٠١٢

د. عصام نسيم